量子測定理論の数理 (量子システム推定の数理)

岡村, 和弥

数理解析研究所講究録
第2059巻 2017年 103-112

量子測定理論の数理

名古屋大学情報科学研究科
岡村 和弥 *

1 導入

本稿では量子測定理論の数理に関して小澤正直氏との共同研究の成果 [14] について紹介を行う。過去の RIMS 研究集会で発表した内容およびその記録である数理解析研究所講究録原稿と重複する部分も多いが，[14] の編集と公表の過程で色々と進歩した部分もあるためここで改めて提示し直す意義も大きいと考えている。

2 章で [14] 以前の成果で中心的な部分を眺望したのち，3 章と 4 章で先行研究との違いを意識しながら [14] の成果の詳細に踏み込んでいく。先行研究を含む量子測定理論のこれまでの流れでは有限自由度量子系での測定に関心があったのに対し，[14] では無限自由度量子系での測定を正面に据えて扱っていく。有限自由度量子系と無限自由度量子系では用いる数学的道具が異なるため測定理論においても必然的に理論の展開・解析方法に差が生じる。特に無限自由度量子系での測定理論は数学的な難しさから敬遠されてきたこともありあまり発展してこなかった現状がある。したがって，当然のことながら場の量子論での局所測定などが測定理論において体系的研究されることはなかった。[14] では一般の量子系での測定理論の体系的解析を行い，その結果を用いて代数的場の量子論での局所測定の定式化と性質を解析し無限自由度量子系および場の量子論での測定理論を大きく進展させた。

2 先行研究の成果：[14] 以前の結果

量子測定の数理的研究は von Neumann の教科書 [12] で始まった。[12] において次の 2 つの重要な貢献がなされた：

- von Neumann モデルの定式化。
- $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする。非縮退の離散スペクトル（固有値）をもつ物理量 $A = \sum_j a_j E(\{a_j\})$ の測定による状態変化は，$\mathbb{R}$ の部分集合 Δ の範囲にあるスペクトルが測定された時，各状態（密度作用素）ρ に対し，

$$\rho \mapsto \frac{\sum_{a_j\in\Delta} E(a_j)\rho E(a_j)}{\mathrm{Tr}[E(\Delta)\rho]} \tag{1}$$

で与えられる。ただし，$E(\{a_j\}) = E(a_j)$。

*okamura@math.cm.is.nagoya-u.ac.jp

後者は1951年にLüders [10]（英訳あり）によって縮退のある場合に拡張され，**von Neumann-Lüders の射影仮説**と呼ばれるようになる。$\Delta=\mathbb{R}$ のときの式 (1) の写像は

$$\rho \mapsto \sum_{a_j\in\mathbb{R}} E(a_j)\rho E(a_j) \tag{2}$$

となる。1962年に中村と梅垣により，この写像が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\{A\}'$ $(:=\{B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\mid AB=BA\})$ への条件付き期待値（の双対写像）であることが指摘された [11]。この指摘により，測定による状態変化を数学的に位置付ける枠組みの整備が加速した。中村と梅垣は物理量 A が連続スペクトルを持つ場合にも同様に条件付き期待値が存在すると [11] において予想した。けれども，Arveson によりこの予想が1967年に否定的に解かれた [3]。これを契機としてより広い枠組みで測定による変化を記述する数学的枠組みを模索する研究，特に，Davies と Lewis によるインストルメントの枠組みによる測定の特徴づけの研究がスタートするのである。

1970年，Davies と Lewis によりインストルメント (instrument) の理論が発表された [7, 6]。$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の σ-有限 von Neumann 代数とする。今後，本稿で登場する全ての on Neumann 代数は σ-有限（任意の互いに直交する射影作用素の族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は高々加算濃度 $|\Lambda|\le\aleph_0$）であると仮定する。$(S,\mathcal{F})$ を可測空間とする。そして，$\mathcal{M}_*$ で $\mathcal{M}$ 上の正規な線型汎函数の全体，$\mathcal{S}_n(\mathcal{M})$ で $\mathcal{M}$ 上の正規状態の全体（$\mathcal{M}$ の前双対），$\mathrm{P}_n(\mathcal{M}_*)$ で $\mathcal{M}_*$ 上の正値線型写像全体を表す。

定義 1. $\mathcal{I}:\mathcal{F}\to\mathrm{P}_n(\mathcal{M}_*)$ が $(\mathcal{M},S)$ に対するインストルメント *(以後，instrument)* であるとは，以下の2条件を満たすことをいう：

(1) 任意の $\rho\in\mathcal{M}_*$ に対して，$\|\mathcal{I}(S)\rho\|=\|\rho\|$.

(2) 任意の互いに素な高々可算個の $\mathcal{F}$ の元の族 $\{\Delta_i\}$，$\rho\in\mathcal{M}_*$，$M\in\mathcal{M}$ に対し，

$$\langle\mathcal{I}(\cup_i\Delta_i)\rho, M\rangle=\sum_i\langle\mathcal{I}(\Delta_i)\rho, M\rangle. \tag{3}$$

Instrument の定義から明らかなように，instrument は出力に対応する Δ ごとに $\mathcal{M}$ 上の正規な正値線型写像に値をとる測度であり，とくに $\Delta=S$ のときは単位的となるものである。$(\mathcal{M},S)$ に対する instrument $\mathcal{I}$ はメーター $\mathbf{x}$ をもつ測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対応し，測定前の正規状態 ρ が与えられるごとに確率測度 $\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\}$ を

$$\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\}=\|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|=\langle\mathcal{I}(\Delta)\rho,1\rangle,\quad \Delta\in\mathcal{F} \tag{4}$$

で与え，また，メーター $\mathbf{x}$ の出力が $\Delta\in\mathcal{F}$ に含まれるときのみを採用する場合の測定後の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ を

$$\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}=\frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|} \tag{5}$$

で与える。

以下の3条件を満たす $\mathcal{I}:\mathcal{M}\times\mathcal{F}\to\mathcal{M}$ を考える：

(1) 任意の $\Delta\in\mathcal{F}$ に対し，$M\mapsto\mathcal{I}(M,\Delta)$ は $\mathcal{M}$ 上の正規な正値線型写像である；

(2) $\mathcal{I}(1,S)=1$；

(3) 任意の互いに素な高々可算個の $\mathcal{F}$ の元の族 $\{\Delta_i\}$，$\rho\in\mathcal{M}_*$，$M\in\mathcal{M}$ に対し，

$$\langle\rho,\mathcal{I}(M,\cup_i\Delta_i)\rangle=\sum_i\langle\rho,\mathcal{I}(M,\Delta_i)\rangle. \tag{6}$$

この写像は次の関係により $(\mathcal{M}, S)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ がただ一つ対応する：

$$\langle \mathcal{I}(\Delta)\rho, M\rangle = \langle \rho, \mathcal{I}(M, \Delta)\rangle. \tag{7}$$

したがって上記3条件を満たす $\mathcal{I} : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \to \mathcal{M}$ も $(\mathcal{M}, S)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ と呼ぶ。

$(\mathcal{M}, S)$ に対するインストルメント $\mathcal{I}$ に対し，$\mathcal{I}$ に伴う確率作用素値測度 $\Pi_{\mathcal{I}}$ を任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し $\Pi_{\mathcal{I}}(\Delta) = \mathcal{I}(1, \Delta)$ で定義する。

現在の量子測定理論の礎となる結果が小澤による完全正値インストルメントの導入である。

定義 2 (完全正値インストルメント [15, 16]). $\mathcal{I}$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対する完全正値インストルメント *(completely positive instrument,* 以後 *CP instrument)* であるとは，$\mathcal{I}$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対する *instrument* であって，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$，$n \in \mathbb{N}$，$A_1, A_2, \cdots, A_n$，$B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_i^* \mathcal{I}(A_i^* A_j, \Delta) B_j \geq 0 \tag{8}$$

が成り立つときという。CPInst$(\mathcal{M}, S)$ で $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* の集合を表す。

補題 3 (小澤 [16, Proposition 4.2]). $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し，*Hilbert* 空間 $\mathcal{K}$，スペクトル測度 $E : \mathcal{F} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$，非退化な正規表現 $\pi : \mathcal{M} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ および等長作用素 $V \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(M, \Delta) = V^* E(\Delta)\pi(M)V, \tag{9}$$

$$E(\Delta)\pi(M) = \pi(M)E(\Delta) \tag{10}$$

を満たすものが存在する。

[15, 16] において von Neumann モデルを一般化した測定過程も定義された。

定義 4. $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ が測定過程であるとは，$\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ は *Hilbert* 空間 $\mathcal{K}$，$\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の正規状態 σ，スペクトル測度 $E : \mathcal{F} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$，および $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 U からなる4つ組のことをいう。

定理 5 ([15, 16]). $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ と測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ の "統計的同値類" は一対一対応する。この対応は，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対し，

$$\mathcal{I}(X, \Delta) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)[U^*(X \otimes E(\Delta))U] \tag{11}$$

により与えられる。

ここで，2つの測定過程は同一の instrument を定めるとき統計的同値 (statistically equivalent) であるという。また，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を von Neumann 代数，$\sigma \in \mathcal{S}_n(\mathcal{N})$ とするとき，$\mathrm{id} \otimes \sigma$ を von Neumann 代数のテンソル積代数 $\mathcal{M} \overline{\otimes} \mathcal{N}$ から $\mathcal{M}$ への線型写像として

$$\langle \rho \otimes \sigma, X\rangle = \langle \rho, (\mathrm{id} \otimes \sigma)(X)\rangle, \quad \rho \in \mathcal{S}_n(\mathcal{M}), X \in \mathcal{M} \overline{\otimes} \mathcal{N} \tag{12}$$

により定義する。

有限自由度量子系の測定が測定過程で記述されるものとして完全に特徴づけられることをこの結果は示している[1]。すなわち，有限自由度量子系では物理量代数が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ であるおかげで，自動的に任意の CP instrument が物理的に意味のあるものだと考えられる。この研究の後に，[17] で反復可能性仮説 (repeatability hypothesis) に関わる Davies-Lewis 予想が解決されて，量子測定理論の現在までに至る研究の方向性が確立した。本稿では十分に展開されてない歴史的経緯等は [19] を参照して頂きたい。

しかしながら，以後の量子測定理論の研究からは任意の von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ において任意の CP instrument が物理的に意味があるかはわかっていなかった。

3 正規拡張性質と CP instrument の表現定理

[15, 16] の成果の要は CP instrument に関する表現理論であり，完全正値写像や正規表現の表現定理を駆使することで達成された。したがって，出発点に立ち返って理論を再整理する作業は本質を理解するためにも重要だと考える。特に，代数的量子論および代数的確率論との関係を先行研究に増して深めていく必要性がある。

$(\mathcal{M},S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ は完全正値写像に値を取る測度であるから，$L^\infty(S,\mathcal{F},\mathcal{I})$ が定まる。

補題 6 (小澤 [16, Proposition 4.2]). $(\mathcal{M},S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し，*Hilbert* 空間 $\mathcal{K}$，忠実な正規表現 $E: L^\infty(S,\mathcal{F},\mathcal{I}) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$，非退化な正規表現 $\pi: \mathcal{M} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ および等長作用素 $V \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$，$f \in L^\infty(S,\mathcal{F},\mathcal{I})$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(M,\Delta) = V^* E([\chi_\Delta])\pi(M)V, \tag{13}$$

$$E(f)\pi(M) = \pi(M)E(f) \tag{14}$$

を満たすものが存在する。

補題6から，$\mathcal{M}$ と $L^\infty(S,\mathcal{I})$ の双正規 (binormal) テンソル積代数 $\mathcal{M}\otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S,\mathcal{I})$ の $\mathcal{K}$ 上の双正規 ($\mathcal{M}$，$L^\infty(S,\mathcal{I})$ それぞれで正規) 表現 $\widetilde{\pi}$ で，任意の $M \in \mathcal{M}$ と $f \in L^\infty(S,\mathcal{I})$ に対し，

$$\widetilde{\pi}(M \otimes f) = E(f)\pi(M) \tag{15}$$

を満たすものが存在する (von Neumann 代数の双正規テンソル積については [8] 参照。$L^\infty(S,\mathcal{I})$ は核型なので，他の C*-代数との C*-テンソル積は一意的である)。任意の $(\mathcal{M},S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ に対し，単位的（双正規）完全正値写像 $\Psi_{\mathcal{I}}: \mathcal{M}\otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S,\mathcal{I}) \to \mathcal{M}$ を

$$\Psi_{\mathcal{I}}(X) = V^*\widetilde{\pi}(X)V, \quad X \in \mathcal{M}\otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S,\mathcal{I}) \tag{16}$$

で定義する。このとき，$\Psi_{\mathcal{I}}$ は

$$\Psi_{\mathcal{I}}(M \otimes [\chi_\Delta]) = \mathcal{I}(M,\Delta) \tag{17}$$

[1] この言明のためには測定及び CP instrument を公理的に特徴づける必要がある。このトピックについては [18] において提示されている。

を任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対して満たす。$\mathcal{M} = \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の場合には，前章で紹介した結果から von Neumann 代数のテンソル積 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} L^\infty(S,\mathcal{I})$ への拡張 $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}} : \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \overline{\otimes} L^\infty(S,\mathcal{I}) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で，任意の $X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S,\mathcal{I})$ に対し，

$$\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}(X) = \Psi_{\mathcal{I}}(X) \tag{18}$$

を満たすものが存在する。一般には双正規テンソル積の単位的正規線型写像の存在までしか証明できず，**Arveson の拡張定理**（Hahn-Banach の定理の完全正値写像版）を用いて von Neumann 代数のテンソル積上に拡張しても一般にその拡張は一意性も正規性もないが，条件次第で von Neumann 代数のテンソル積まで拡張できることがわかる。この事実から次の性質を定義しよう。

定義 7 (正規拡張性質 (normal extension property) [14]). $\mathcal{I}$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* とする。$\mathcal{I}$ が正規拡張性質（*normal extension property,* 以後 *NEP*）を満たすとは，単位的正規完全正値写像 $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}} : \mathcal{M} \overline{\otimes} L^\infty(S,\mathcal{I}) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}|_{\mathcal{M}\otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S,\mathcal{I})} = \Psi_{\mathcal{I}}$ を満たすものが存在するときをいう。

正規拡張性質という名前は operator system の理論における一意拡張性質（unique extension property, UEP） [4] の名称を参考してつけた。

定義 8 ([14]). $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程であるとは，*Hilbert* 空間 $\mathcal{K}$, $\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の正規状態 σ, スペクトル測度 $E : \mathcal{F} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$, および $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 U からなる 4 つ組であって，$\{\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(M, \Delta) \mid M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{M}$ を満たすことをいう。ただし，$\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$ は $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する *CP instrument* であって，任意の $X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(X, \Delta) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)[U^*(X \otimes E(\Delta))U]$ で定義される。

NEP をもつ CP instrument に対して次の定理が成り立つ。

定理 9 ([14]). $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し次の条件は同値である：
(*i*) $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。
(*ii*) $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する *CP instrument* $\widetilde{\mathcal{I}}$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，$\widetilde{\mathcal{I}}(M, \Delta) = \mathcal{I}(M, \Delta)$ を満たすものが存在する。
(*iii*) $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(M, \Delta) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U] \tag{19}$$

を満たすものが存在する。

定理 9 から CP instrument が NEP をもつことと測定過程で記述可能であることが等価であることがわかり，一般の (σ-有限な) von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ において測定過程で記述可能な CP instrument のクラスを数学的に特徴づけることができた。この結果から次の定理は明らかである。

定理 10 ([14]). *Let* $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の σ-有限 *von Neumann* 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。このとき，$(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ の統計的同値類と

NEP をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ の間に一対一対応が存在する。この対応は，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(M, \Delta) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U] \tag{20}$$

で与えられる。

4　事後状態の族とその存在

2章で $(\mathcal{M}, S)$ に対する instrument $\mathcal{I}$ が与えられると測定装置のメーターの出力値の集合 $\Delta \in \mathcal{F}$ を指定するごとの測定後の状態が $\mathcal{I}$ を用いて与えられることをみた。本章ではこの考察を集合 $\Delta \in \mathcal{F}$ に対してではなく出力値1点 $s \in S$ に対して広げる。もちろん，物理量が連続スペクトルをもつような状況に対応した測度空間 $(S, \mathcal{F})$ において必ずしも $\rho_{\{\mathrm{x} \in \{s\}\}}$ は意味を持たない。それ故，次のように事後状態の族という概念を定義する。$(\mathcal{M}, S)$ に対する instrument $\mathcal{I}$ と $\rho \in \mathcal{S}_n(\mathcal{M})$ に対し確率測度 $\|\mathcal{I}\rho\|$ を $\|\mathcal{I}\rho\|(\Delta) = \|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|$, $\Delta \in \mathcal{F}$ で定義する。

定義 11 (事後状態の族). $\mathcal{I}$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対する *instrument*, $\rho \in \mathcal{S}_n(\mathcal{M})$ とする。$\mathcal{M}$ 上の正規状態の族（*family of posterior states*）$\{\rho_s\}_{s \in S}$ は以下の2条件を満たすとき $(\mathcal{I}, \rho)$ に対する事後状態の族であるという：
(1) $s \mapsto \rho_s$ は弱 * $\|\mathcal{I}\rho\|$-可測 $\mathcal{M}_*$-値写像である。すなわち，任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $s \mapsto \langle \rho_s, M \rangle$ は $\|\mathcal{I}\rho\|$-可測である。；
(2) 任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\langle \mathcal{I}(\Delta)\rho, M \rangle = \int_{\Delta} \langle \rho_s, M \rangle \, d\|\mathcal{I}(s)\rho\|. \tag{21}$$

定義から，事後状態の族 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ は存在すれば $\|\mathcal{I}\rho\|$-a.e. の意味で一意である。そして，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，

$$\frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|} = \int_{\Delta} \rho_s \, \frac{d\|\mathcal{I}(s)\rho\|}{\|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|} \tag{22}$$

が成り立つ。

事後状態の族の存在について次の結果が知られている。

定理 12 ([17]). $\mathcal{H}$ を *Hilbert* 空間，$(S, \mathcal{F})$ を測度空間とする。任意の $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ と $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の正規状態 ρ に対し，$(\mathcal{I}, \rho)$ に対する事後状態の族 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ は常に存在する。

この定理は有限自由度量子系の測定では常に事後状態の族が存在することを主張している。[17] では他にも一般の von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ での事後状態の族の存在に関する十分条件が与えられている。[14] では次の結果を得た。

定理 13 ([14]). $\mathcal{I}$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* とする。このとき次は同値である：
(1) $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。
(2) 任意の $\rho \in \mathcal{S}_n(\mathcal{M})$ に対し，$(\mathcal{I}, \rho)$ に対する強可測な事後状態の族 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ が存在する。

ここで，$s \mapsto \rho_s$ が強（$\mathcal{F}$-）可測であるとは，S 上の $\mathcal{F}$-可測 $\mathcal{M}_*$-値単関数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty} \|\rho_s - F_n(s)\| = 0$ を任意の $s \in S$ において満たすものが存在することをいう。この定理は非常に強い同値性を主張しており，測定過程で定義される CP instrument の集合と任意の正規状態において強可測な事後状態の族をもつ CP instrument の集合が同一であるという結果である。したがって，ある正規状態において事後状態の族をもたない CP instrument は測定過程で定義されないという結果が従う。測定過程で定義されない CPinstrument の例は反復可能性に関する以下の議論から具体的に与えられる。

定義 14 ([14]). $\mathcal{M}$ を *von Neumann* 代数，$(S,\mathcal{F})$ を測度空間とする。
(1) $(\mathcal{M},S)$ に対する *instrument* $\mathcal{I}$ は，任意の $\Delta_1,\Delta_2 \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{I}(\Delta_1)\mathcal{I}(\Delta_2) = \mathcal{I}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ を満たすとき，反復可能（*repeatable*）であると呼ばれる。
(2) $(\mathcal{M},S)$ に対する *instrument* $\mathcal{I}$ は，任意の $\Delta_1,\Delta_2 \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{I}(\mathcal{I}(1,\Delta_2),\Delta_1) = \mathcal{I}(1,\Delta_1 \cap \Delta_2)$ を満たすとき，弱反復可能（*weakly repeatable*）であると呼ばれる。
(3) $(\mathcal{M},S)$ に対する *instrument* $\mathcal{I}$ は，S の可算部分集合 S_0 と写像 $T : S_0 \to \mathrm{P}_n(\mathcal{M}_*)$ で

$$\mathcal{I}(\Delta) = \sum_{s\in\Delta} T(s), \quad \Delta \in \mathcal{F} \tag{23}$$

を満たすものが存在するとき，離散的（*discrete*）であると呼ばれる。

これまでは次の結果が知られていた。

定理 15 ([17]). $\mathcal{M}$ を *von Neumann* 代数，$(S,\mathcal{F})$ を標準 *Borel* 空間，$\mathcal{I}$ を $(\mathcal{M},S)$ に対する弱反復可能な *instrument* とする。もし $\mathcal{M}$ 上のある忠実な正規状態 φ に対し $(\mathcal{I},\varphi)$ に対する事後状態の族 $\{\rho_s\}_{s\in S}$ が存在するならば，$\mathcal{I}$ は離散的である。特に，可分な *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ に対し，$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),S)$ に対するどの弱反復可能 *instrument* $\mathcal{I}$ も離散的である。

今回得られた結果は上の結果を CP instrument の場合に精密化したものである。

定理 16 ([14]). $\mathcal{M}$ を *von Neumann* 代数，$(S,\mathcal{F})$ を標準 *Borel* 空間とする。$(\mathcal{M},S)$ に対するどの弱反復可能 *instrument* $\mathcal{I}$ が *NEP* をもつことと離散的であることは必要十分である。

この定理の証明は定理 13 の利用が本質的である。そして，ようやくであるがこの定理を用いると以下が測定過程で定義されない CPinstrument の例になっていることがわかる。

例 17 ([14]). m を $\mathbb{R}$ の閉区間 $[0,1]$ 上の *Lebesgue* 測度とする。
以下で定義される $(L^\infty([0,1],m),[0,1])$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}_m$ は *NEP* をもたない：

$$\mathcal{I}_m(f,\Delta) = [\chi_\Delta]f, \quad f \in L^\infty([0,1],m), \Delta \in \mathcal{B}([0,1]). \tag{24}$$

von Neumann 代数は有限次元 von Neumann 部分代数の増大列の合併の弱閉包になっているとき，AFD（近似的有限次元，approximately finite-dimensional）であるという。

例 18 ([14]). $\mathcal{N}$ を可分 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *AFD* II_1 因子環，A を連続スペクトルをもつ $\mathcal{N}$ の自己共役元とする。以下で定義される $(\mathcal{N},\mathbb{R})$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}_A$ は *NEP* をもたない：

$$\mathcal{I}_A(N,\Delta) = \mathcal{E}(N)E^A(\Delta), \quad N \in \mathcal{N}, \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{25}$$

ここで，$\mathcal{E}$ は $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N} \cap \{A\}'$ への条件付き期待値である。

5 CP instrument の集合 $\mathrm{CPInst}(\mathcal{M}, S)$ の特徴づけ

前章では $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument が測定過程で記述できるための必要十分条件である NEP という非常に作用素環論的な条件が焦点になった。代数的確率論および量子測定理論の研究で大変重要な役割を果たした $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{M}$ への正規な条件付き期待値の存在は $(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の CP instrument が NEP をもつという結果を導く：

命題 19. $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 代数で（正規な）条件付き期待値 $\mathcal{E}: \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$ が存在するものとし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。$(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の *CP instrument* $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。

正規な条件付き期待値 $\mathcal{E}: \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$ が存在するクラスの von Neumann 代数は原子的 (atomic) であると呼ばれている。数学的な立場からは，正規な条件付き期待値の存在の次には，正規でない条件付き期待値の存在，すなわちノルム 1 の射影が存在する場合に興味がわく。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ からのノルム 1 の射影が存在する von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ は**単射的 (injective)** であると言われる。この呼び方は同値な条件がコホモロジー論における単射性の条件であることから名づけられている。単射的 von Neumann 代数の構造理論の研究は Connes の Fields 賞受賞理由に挙げられる成果を含む作用素代数における中心的な研究テーマであった（[5, 20] 参照）。Anantharaman-Delaroche [1] の主定理を駆使することで次の定理が示される：

定理 20. $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の単射的 *von Neumann* 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。$(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し，*NEP* をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* のネット $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ で $\mathcal{I}_\alpha \to^{uw} \mathcal{I}$ かつ任意の α と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{I}_\alpha(1, \Delta) = \mathcal{I}(1, \Delta)$ を満たすものが存在する。

ここで，$M \in \mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ のネット $\{M_\alpha\}_\alpha$ に対し，$\{M_\alpha\}_\alpha$ が M に超弱収束するとき $M_\alpha \to^{uw} M$ と表すことにし，その上で，$(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ と $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument のネット $\{\mathcal{I}_\alpha\}_\alpha$ に対して，全ての $M \in \mathcal{M}$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{I}_\alpha(M, \Delta) \to^{uw} \mathcal{I}(M, \Delta)$ が成立することを $\mathcal{I}_\alpha \to^{uw} \mathcal{I}$ で表した。

定理 21 ([14, 13])**.** $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。このとき次の言明が成り立つ：

(1)

$$\mathrm{CPInst}_{\mathrm{NE}}(\mathcal{M}, S) = \mathrm{CPInst}(\mathcal{M}, S).$$

(2) $\mathcal{M}$ が単射的ならば，

$$\begin{aligned}\mathrm{CPInst}(\mathcal{M}, S) = \{\mathcal{I} \in \mathrm{CPInst}(\mathcal{M}, S) \mid \exists \{\mathcal{I}_\alpha\}_\alpha \subset \mathrm{CPInst}_{\mathrm{NE}}(\mathcal{M}, S) \\ \text{s.t. } \mathcal{I}_\alpha \to^{uw} \mathcal{I} \ \&\ \forall \alpha, \Pi_{\mathcal{I}_\alpha} = \Pi_{\mathcal{I}}\}.\end{aligned}$$

物理系の物理量代数を記述する von Neumann 代数は AFD かつ可分であることが知られている。加えて，可分な von Neumann 代数が単射的であるのは AFD であるとき，その時に限ることが知られている。この大変有名な結果は Connes, Wassermann, Haagerup, Popa および他の研究者たちにより確立された [5, 20]。したがって，定理 21 (2) は物理系

を記述すると考えられる von Neumann 代数においては必ず成立し，それらの系における全ての CP instrument が自然な測定を記述すると結論付けられる。

また，定理 20 から次の性質が思いつく。

定義 22 (近似的正規拡張性質 (approximately normal extension property)). $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 代数とし，$(S,\mathcal{F})$ を可測空間とする。$(\mathcal{M},S)$ に対する *CP instrument* が近似的正規拡張性質（*approximately normal extension property,* 以後 *ANEP*）をもつとは，*NEP* をもつ $(\mathcal{M},S)$ に対する *CP instrument* のネット $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ で $\mathcal{I}_\alpha \to^{uw} \mathcal{I}$ を満たすものが存在するときをいう。*ANEP* をもつ $(\mathcal{M},S)$ に対する *CP instrument* の集合を $\mathrm{CPInst}_{\mathrm{AN}}(\mathcal{M},S)$ で表す。

しかしながら，任意の von Neumann 代数において $\mathrm{CPInst}_{\mathrm{AN}}(\mathcal{M},S)$ は $\mathrm{CPInst}(\mathcal{M},S)$ と一致する：

定理 23 ([13]). $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 代数とし，$(S,\mathcal{F})$ を可測空間とする。このとき，$\mathrm{CPInst}_{\mathrm{AN}}(\mathcal{M},S)=\mathrm{CPInst}(\mathcal{M},S)$。

この結果は，超弱収束が各点収束の意味であることから離散的 CP instrument をうまく定義することで証明される。

6 まとめと展望

本稿では [14] に従って，無限自由度量子系での測定理論の一般論を構築する目的で一般の von Neumann 代数上で定義された CP instrument の数理を展開した。CP instrument に対する正規拡張性質 (NEP) の導入により，先行研究では $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ において得られていた CP instrument の測定過程による実現定理を一般の von Neumann 代数上に拡張することができた：NEP をもつ CP instrument に対し測定過程が存在し，その測定過程により定義される CP instrument と一致する。この結果を応用して NEP が（強可測な）事後状態の族の存在の必要十分条件であることを示したり，NEP を持たない CP instrument の例の構成を行うなど CP instrument の構造理論を大きく進展させることが出来た。

他にも，代数的場の量子論 [2, 9] において，有界時空領域上の物理量代数上で定義された測定過程で記述可能な CP instrument ならば，大域的な物理量代数上で定義された有界な時空領域において作用する CP instrument に必ず拡張されることを主張する結果を [14] において得た。この結果は NEP という性質の強力さを改めて示す結果であり，代数的場の量子論を含む局所量子物理学 (local quantum physics) での測定理論を大きく前進させ，前章までに展開した [14] の方法論の応用可能性を示す一例である。本稿では展開しなかった Heisenberg 描像における測定理論については今後の課題である（[13] 参照)。また，無限自由度量子系での具体的な測定の良いモデルを探すことにより，測定に対する我々の認識を一新しつつ洗練したものにできる期待をもっている。

参考文献

[1] C. Anantharaman-Delaroche, Pacific J. Math. **171**, (1995), 309-341.

[2] H. Araki, *Mathematical theory of quantum fields*, Oxford Univ. Press, (1999).

[3] W. Arveson, Amer. J. Math. **89**, 578-642 (1967).

[4] W. Arveson, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 1065-1084.

[5] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, (1994).

[6] E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, (Academic Press, London, 1976).

[7] E.B. Davies and J.T. Lewis, Comm. Math. Phys. **17**, 239–260 (1970).

[8] E.G. Effros and E.C. Lance, Adv. Math. **25** (1977), 1-34.

[9] R. Haag, *Local Quantum Physics -Fields, Particles, Algebras-* (2nd ed.), Springer-Verlag, (1996).

[10] G. Lüders, Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß, Ann. Physik **8**, 322-328 (1951).

[11] M. Nakamura and H. Umegaki, Math. Jpn. **7**, 151-157 (1962).

[12] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer-Verlag, Berlin, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955).

[13] K. Okamura, Measuring processes and the Heisenberg picture, arXiv:1511.09228 [quant-ph].

[14] K. Okamura and M. Ozawa, J. Math. Phys. **57**, 015209 (2016); doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4935407.

[15] M. Ozawa, In; *Probability Theory and Mathematical Statistics*, (eds. K. Ito and J.V. Prohorov), Lecture Notes Math. **1021**, (Springer, 1983), pp.518–525.

[16] M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79–87 (1984).

[17] M. Ozawa, Publ. RIMS **21**, 279–295 (1985); J. Math. Phys. **26**, 1948–1955 (1985).

[18] M. Ozawa, Ann. Phys.(N.Y.) **259**, 121-137 (1997); Ann. Phys.(N.Y.) **331**, 350-416 (2004).

[19] M. Ozawa, Mathematical foundations of quantum information: Measurement and foundations, Sugaku Expositions **27**, 196-221 (2014); arXiv:1201.5334 [quant-ph].

[20] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras III*, (Springer, 2002).